تحويل لابلاس Laplace Transformation

تحويل لابلاس: يحول المعادلات التفاضلية الجبرية ADE التي تصف المنظومات الديناميكية (سواء كانت خطية أم غير خطية) إلى معادلات جبرية

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

ويسمى s التردد العقدي حيث $s=\delta+j\omega$

فيكون: $F(s)=L\{f(t)\}$

أو باستخدام رمز هانتل $F(s)\bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$

يمكن الانتقال من تحويل لابلاس (المفيد في تحليل النظم الخطية) إلى تحويل فورييه (المفيد في تحليل الاشارات) بإبدال التردد العقدي s بالتردد jω على أن يتم ذلك حصرا بالنسبة للتوابع المستمرة التي يوجد لها تحويل فورييه وتحويل لابلاس

1

بعض خصائص تحويل لابلاس

عند إجراء تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية يجب أن تكون الشروط الابتدائية (كافة المشتقات في اللحظة t) تساوي صفر.

إذا لم تكن الشروط الابتدائية تساوي الصفر يجب الانتباه إلى أن:

مشتق من الرتبة الثانية:

$$L\{y''(t)\}=s^2Y(s)-sY(0)-Y'(0)$$

مشتق من الرتبة الأولى:

$$L\{y'(t)\}=sY(s)-Y(0)$$

تحويل لابلاس عملية خطية

$$L\{c_1F_1(t)+c_2F_2(t)\}=c_1L\{F_1(t)\}+c_2L\{F_2(t)\}$$

تحويل لابلاس لجداء تابعين لا يساوي جداء تحويلي لابلاس

$$L\{c_1F_1(t)\times c_2F_2(t)\}\neq L\{c_1F_1(t)\}\times L\{c_2F_2(t)\}$$

2

تحويل لابلاس العكسي

يمكن الانتقال من صيغة تحويل لابلاس (من الفضاء العقدي) إلى الصيغة الزمنية بإجراء تحويل لابلاس العكسي كما يلي:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

وتستخدم الجداول المرجعية للحصول على تحويل لابلاس وتحويل لابلاس العكسي بحيث لا يكون حسابها في كل مرة ضروريا.

3

Nr.	$f(t)\ ;\ f(t)=0$ for $t<0$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^2	$\frac{2}{s^3}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
6	$e^{-\delta t}$	$\frac{1}{s+\delta}$
7	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{Ts+1}$
8	$te^{-\delta t}$	$\frac{1}{(s+\delta)^2}$
9	$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$
10	$1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}$	$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$
11	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$e^{-\delta t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
14	$e^{-\delta t}\cos\omega t$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
15	$1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}e^{-\frac{dt}{T}}\sin(\sqrt{1-d^2}\frac{t}{T}+\arccos d)$	$\frac{1}{s(T^2s^2+2dTs+1)}$

4

Transfer function تابع التحويل

تأخذ المعادلة التفاضلية لمنظومة أحادية الدخل والخرج الشكل القياسي التالي:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d\ y}{dt} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots\ldots + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{d\ u}{dt} + b_0 u$$

باستبدال إشارة التفاضل في المعادلة السابقة $\frac{d^i y}{dt^i}$ بـ y^i و $\frac{d^j u}{dt^j}$ بـ u^j تؤول المعادلة السابقة إلى الشكل :

$$a_n y^{n} + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y$$

$$= b_m u^{m} + b_{m-1} u^{m-1} + \ldots\ldots + b_2 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

إذا تم استبدال إشارة التفاضل $\frac{d}{dt}$ في المعادلة السابقة بـ D (معامل التفاضل) تؤول المعادلة إلى الشكل التالي :

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y(t) =$$

$$= (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots\ldots + b_2 D^2 + b_1 D + b_0) u(t)$$

5

Transfer function تابع التحويل

✓هذه الصيغة لا تعدو كونها تبسيطا للكتابة. كما أنها لا تكون ممكنة إذا تضمنت المعادلة السابقة حدودا غير خطية

✓لكن تحويل لابلاس الذي يسمح بتحويل علاقة تفاضلية من الشكل المشار إليه إلى علاقة جبرية (يمكن تطبيقه حتى في حال احتواء المعادلة حدودا غير خطية) ويؤدي في حالتنا هذه إلى الحصول على علاقة مشابهة باستخدام المتحول العقدي S وذلك بشرط أن تكون الشروط الابتدائية تساوي الصفر (للتمكن من التخلص من ثابت التكامل).

✓تحويل لابلاس للعلاقة السابقة باعتبار الشروط الابتدائية صفرا هو:

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 S^2 + a_1 S + a_0) Y(S) =$$

$$= (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots\ldots + b_2 S^2 + b_1 S + b_0) U(S)$$

بالاستعاضة عن العبارتين داخل القوسين بالعاملين A(S) و B(S) تكتب المعادلة كالتالي :

$$A(S) \cdot Y(S) = B(S) \cdot U(S)$$

6

تابع التحويل Transfer function

وبالتالي يمكن وصف علاقة الخرج بالدخل من خلال النسبة :

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{B(S)}{A(S)}$$

- يسمى G(S) تابع التحويل Transfer function ويعرف بأنه نسبة تمثيل الخرج على تمثيل الدخل في فضاء لابلاس.
- يشكل تابع التحويل بهذا المعنى واحدا من أهم أشكال النماذج الرياضي للعناصر والمنظومات ويستخدم بشكل واسع في عمليات تحليل استجابة وطبائع هذه المنظومات.
- يسمح تابع التحويل بكتابة معادلة المنظومة في صيغة لابلاس على الشكل:

$$Y(S) = G(S) \cdot U(S)$$

تكون المنظومة خطية إذا توافرت الشروط التالية :

7

تعريف خطية المنظومة في فضاء لابلاس

1. إذا كانت إشارة خرج المنظومة الناتجة عن تأثير مجموع إشارتين خطيتين يساوي المجموع الخطي لاستجابته على هاتين الإشارتين :

$$Y_1(S) = G(S) \cdot U_1(S) \qquad Y_2(S) = G(S) \cdot U_2(S)$$

$$Y(S) = Y_1(S) + Y_2(S) = G(S) \cdot [U_1(S) + U_2(S)] = G(S).U_1(S) + G(S) \cdot U_2(S)$$

2. إذا كان تضخيم إشارة الدخل C مرة يجب أن تسبب مضاعفةً لإشارة الخرج C مرة أيضاً

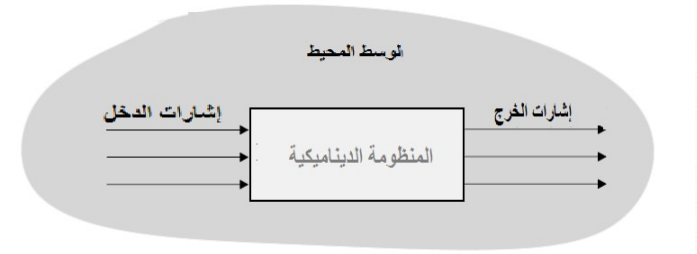
$$C \cdot G(S) \cdot U(S) = C \cdot Y(S)$$

3. إذا كان رد فعل المنظومة على الإشارة الصفرية يساوي الصفر .

8

المخططات الصندوقية Block Diagrams

نعبر بيانيا عن المنظومة وفق تعريفها بالمخطط التالي



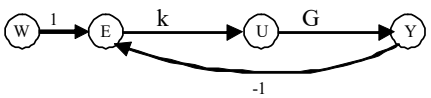
وتستخدم المخططات الصندوقية لتبسيط رسم المنظومات بدرجات تفصيل مختلفة بشكل يوضح بعض تفاصيلها والعمليات الجارية.

يكتب تابع التحويل لكل عنصر ضمن الصندوق فيما يعطي المخطط طريقة توصيل العناصر

9

مخططات سير الإشارة signal flow charts

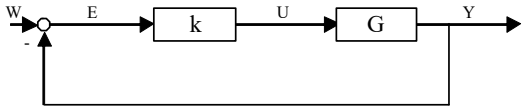
تستخدم مخططات سير الإشارة لتوضيح التأثير المتبادل للإشارات فيما بينها داخل المنظومات فيعبر عن الإشارات بدوائر فيما يعبر عن العناصر أو العمليات التي تجري على هذه الإشارات بأسهم، حيث تنتج كل إشارة من جداء العقدة السابقة لها مع التأثير الذي يعبر عنه السهم. فإذا ما انتهى سهمان إلى العقدة ذاتها، مثلت تلك العقدة مجموع تأثيريهما.



E=W-Y

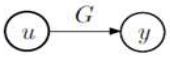
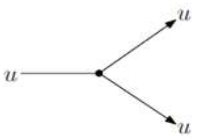
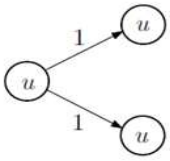
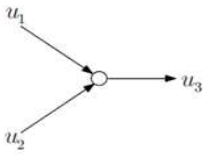
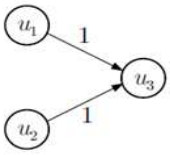
U=kE

Y=GU



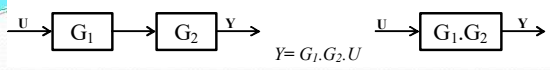
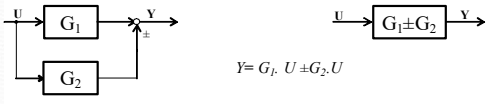
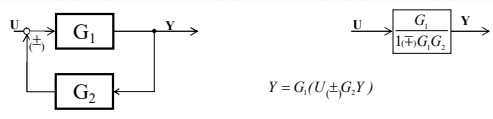
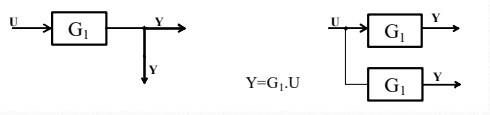
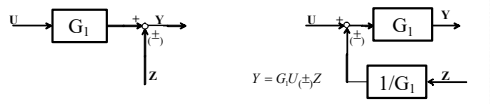
10

مقارنة بين عناصر المخططات الصندوقية ومخططات سير الإشارة

المخططات الصندوقية	مخططات سير الإشارة
	
	
	

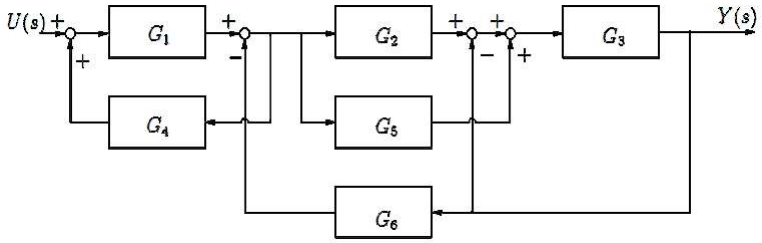
11

تبسيط المخططات الصندوقية

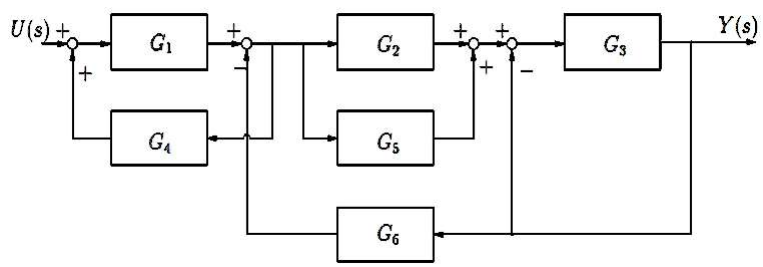
وصل عنصرين على التسلسل	
وصل عنصرين على التوازي	
تابع التحويل المكافئ لعنصر مع تغذية عكسية	
نقل تفرع من بعد عنصر إلى ما قبله	
نقل مجمع من بعد عنصر إلى ما قبله	

12

مثال: أوجد تابع النقل المكافئ للحلقة التالية:

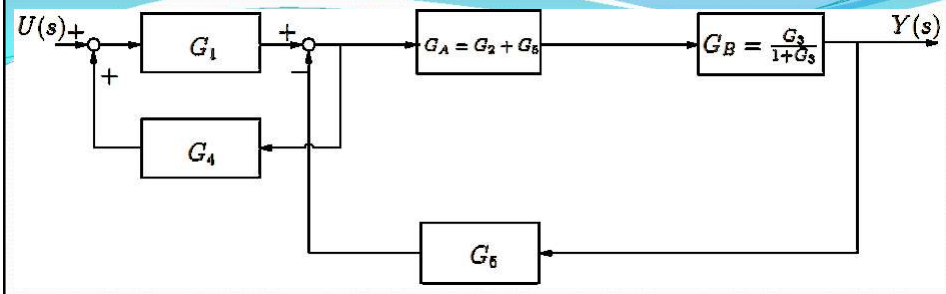


1- تغيير ترتيب المجمعين

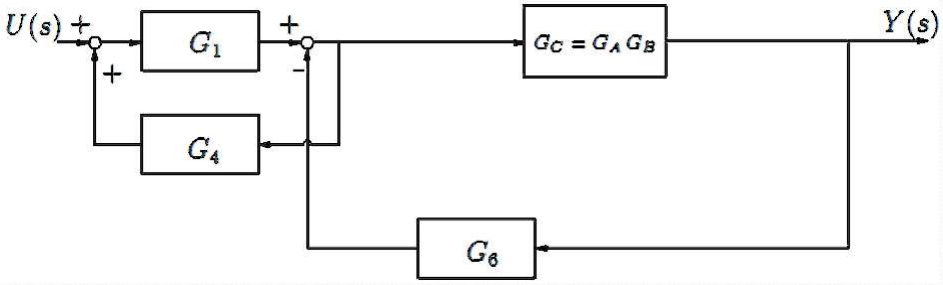


13

2- التخلص من الوصل على التوازي ومن التغذية العكسية:

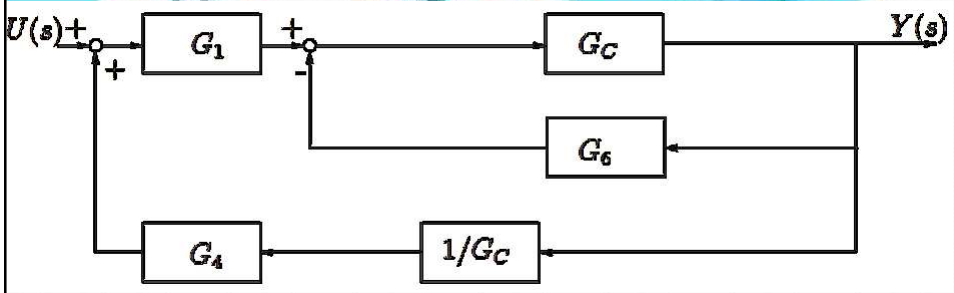


3- التخلص من الوصل على التسلسل:

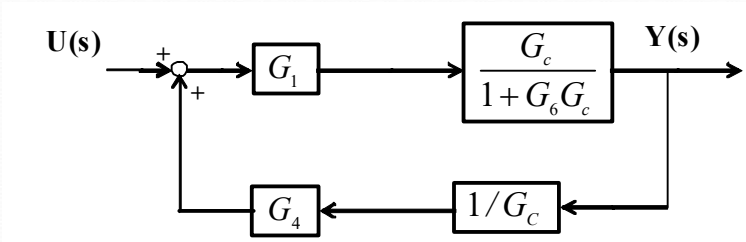


14

4- نقل التفرع إلى اليمين

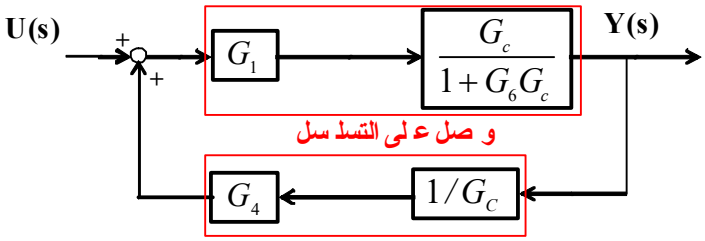


5- التخلص من الرابطة العكسية الداخلية:



15

6- التخلص من الوصل على التسلسل والرابطة العكسية



$$U(s) \rightarrow \frac{G_1 G_c}{1 + G_6 G_c - G_1 G_4} \rightarrow Y(s)$$

16